

Cours – Séquence n° 15 – FONCTIONS (VI) :

fonctions trigonométriques

I- RAPPELS

Définitions

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O .

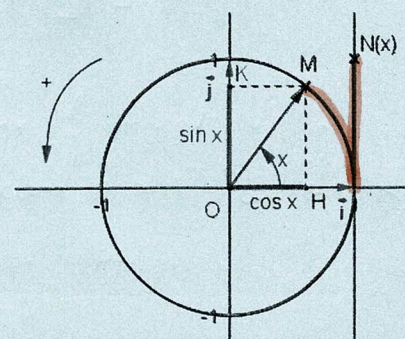
Pour tout nombre réel x , considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x .

À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique

tel que la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ correspond à la longueur IN .

On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires

à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées passant par M .



1. Le **cosinus** du nombre réel x est l'abscisse de M et est noté $\cos(x)$ ou $\cos x$.
2. Le **sinus** du nombre réel x est l'ordonnée de M et est noté $\sin(x)$ ou $\sin x$.

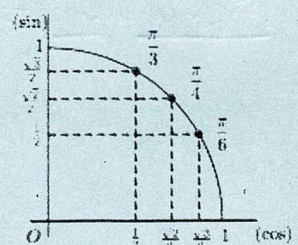
Propriétés

Pour tout nombre réel x , on a :

- 1) $-1 \leq \cos x \leq 1$.
- 2) $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- 3) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Propriétés : valeurs trigonométriques remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Définitions

1. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x , associe $\cos x$, est appelée **fonction cosinus** et est notée $\cos$.
2. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x , associe $\sin x$, est appelée **fonction sinus** et est notée $\sin$.

Propriétés : périodicité

Pour tout nombre réel x et pour tout entier relatif k , on a :

1) $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$.

2) $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$.

Remarques

- On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π .
- Pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus ou de la fonction sinus, il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur 2π , puis de la compléter par des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ où k est un entier relatif et $\vec{i}$ est le vecteur directeur unitaire de l'axe des abscisses.

Exemples

● Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos^2 x = \frac{1}{2} : (E)$

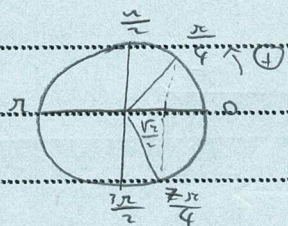
$$(E) \Leftrightarrow \cos x = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$(E) \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(E) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + R\frac{\pi}{2}, R \in \mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions de E est $\left\{ \frac{\pi}{4} + R\frac{\pi}{2}, R \in \mathbb{Z} \right\}$

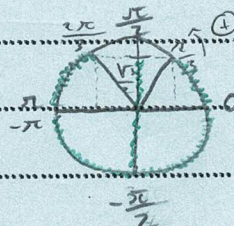
Remarque : $\frac{\pi}{4} + R\frac{\pi}{2}$ s'écrit $\frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} \right)$
module



● Résoudre dans $[-\pi; \pi]$, l'inéquation : $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} : (I)$

$$(I) \Leftrightarrow x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$$

Donc l'ensemble des solutions de (I) est : $\left[-\pi; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$



Propriétés : parité

Pour tout nombre réel x , on a :

$$1) \cos(-x) = \cos x$$

$$2) \sin(-x) = -\sin x$$

Remarques

- On dit que la **fonction cosinus est paire** et que la **fonction sinus est impaire**.
- Rappel :
 - Une fonction f est **paire** lorsque pour tout réel x de son ensemble de définition D : $-x \in D$ et $f(-x) = f(x)$.
 - Une fonction f est **impaire** lorsque pour tout réel x de son ensemble de définition D : $-x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$.
- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction cosinus est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.
- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction sinus est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

D'autres formules « pratiques »

- Formules d'addition** : Pour tous réels a et b , on a :

$$\rightarrow \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\rightarrow \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Retenir « si co co si co co si si » !

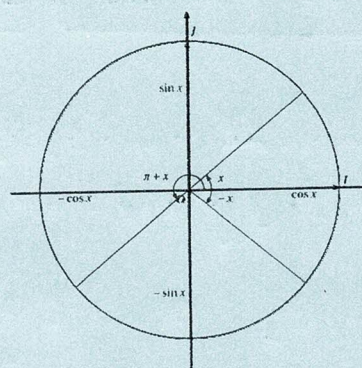
- Cas particuliers** : Pour tout réel x , on a :

$$\rightarrow \sin(x + \pi) = -\sin x$$

$$\rightarrow \cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$\rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$$\rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$



- Formules de duplication** : Pour tout réel a , on a :

$$\rightarrow \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\rightarrow \cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$$

$$\rightarrow \cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\rightarrow \sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

II- ÉTUDE DE LA FONCTION SINUS

Propriétés (admisses)

- 1) La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$.
- 2) La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $\sin'(x) = \cos(x)$.

Étude des variations de la fonction sinus

- Puisque la fonction sinus est périodique de période 2π , il suffit d'étudier ses variations sur un intervalle de longueur 2π , par exemple l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
- D'autre part, comme la fonction sinus est impaire, il suffit d'étudier ses variations sur l'intervalle $[0; \pi]$.
- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $\sin'(x) = \cos(x)$.
 $\sin'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq 0$
 $\sin'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin'(x) = \cos x$	1	0	-1
$\sin x$	0	1	0

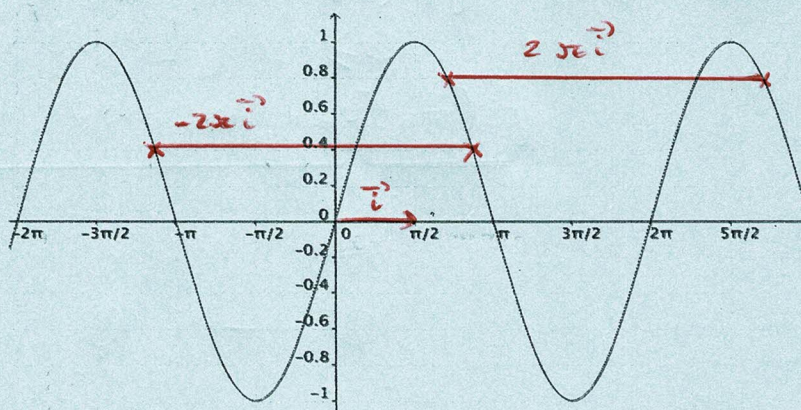
Courbe représentative de la fonction sinus

Pour construire la courbe représentative de la fonction sinus sur $\mathbb{R}$, il suffit de :

- Construire la courbe sur $[0; \pi]$.
- Compléter la courbe sur $[-\pi; 0]$ par symétrie par rapport à l'origine du repère, puisque la fonction sinus est impaire. On obtient ainsi la courbe sur $[-\pi; \pi]$.
- Compléter la courbe par des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ où k est un entier relatif et $\vec{i}$ est le vecteur directeur unitaire de l'axe des abscisses, puisque la fonction sinus est périodique de période 2π .

Remarque

La courbe représentative de la fonction sinus est appelée une sinusoïde.



III- ÉTUDE DE LA FONCTION COSINUS

Propriétés (admisses)

1) La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $\cos'(x) = -\sin(x)$. 

Étude des variations de la fonction cosinus

- Puisque la fonction cosinus est périodique de période 2π , il suffit d'étudier ses variations sur un intervalle de longueur 2π , par exemple l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
- D'autre part, comme la fonction cosinus est paire, il suffit d'étudier ses variations sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.
- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $\cos'(x) = -\sin(x)$.
 $\cos'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\sin x \geq 0$
 $\cos'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq 0$
 Or, pour tout réel x de $[0 ; \pi]$, $\sin x \geq 0$. Donc pour tout réel x de $[0 ; \pi]$, $\cos'(x) \leq 0$.

x	0	π
$\cos'(x) = -\sin x$	0	0
$\cos x$	1	-1

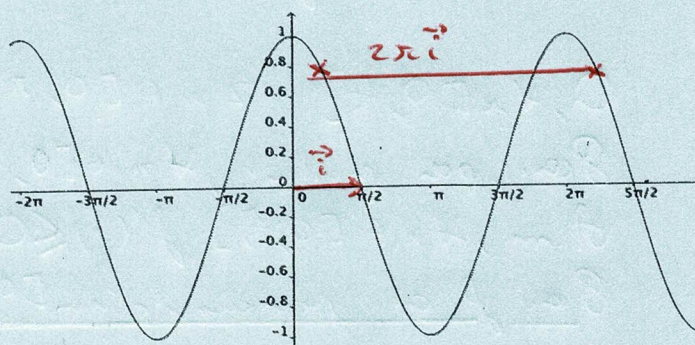
Courbe représentative de la fonction cosinus

Pour construire la courbe représentative de la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$, il suffit de :

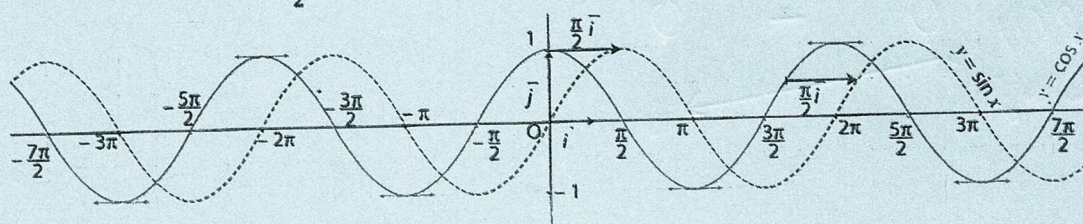
- Construire la courbe sur $[0 ; \pi]$.
- Compléter la courbe sur $[-\pi ; 0]$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, puisque la fonction cosinus est paire. On obtient ainsi la courbe sur $[-\pi ; \pi]$.
- Compléter la courbe par des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ où k est un entier relatif et $\vec{i}$ est le vecteur directeur unitaire de l'axe des abscisses, puisque la fonction cosinus est périodique de période 2π .

Remarques

1. La courbe représentative de la fonction cosinus est aussi appelée une sinusoïde.



2. La courbe représentative de la fonction sinus se déduit de la courbe représentative de la fonction cosinus par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.



Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - \frac{1}{2}$.



1. Étudier la parité de f .
2. Démontrer que la fonction f est périodique de période π .
3. Étudier les variations de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Construire la courbe représentative de la fonction f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, puis déduire sa courbe sur $\mathbb{R}$. Justifier.

1) (i) $\forall x \in \mathbb{R} \quad -x \in \mathbb{R}$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = \cos(-2x) - \frac{1}{2}$

$f(x) = \cos(2x) - \frac{1}{2}$, car la fonction cosinus est paire

$f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire

2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+\pi) = \cos(2(x+\pi)) - \frac{1}{2}$

$f(x+\pi) = \cos(2x+2\pi) - \frac{1}{2}$

$f(x+\pi) = \cos(2x) - \frac{1}{2}$, car la fonction cosinus est 2π périodique

Donc f est bien une fonction π périodique

3) f est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ comme somme de fonctions dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad f'(x) = -2\sin(2x)$

Où, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad 2x \in [0; \pi]$ et $\sin(2x) \geq 0$

Donc, par produit, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad -2\sin(2x) \leq 0$

Ainsi, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad f'(x) \leq 0$

Donc f est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
signe de $f'(x)$	0	-
variation de f	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{1}{2}$

4) Soit continue la courbe de f sur $\mathbb{R}$, il s'agit de :

- Continuer la courbe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

- Puis, comme f est paire, continuer l'image de la courbe précédente par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

On obtient ainsi la courbe de f sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ qui est de longueur π

- Enfin, comme f est π périodique, continuer l'image de la courbe précédente par translation de vecteur $\mathbb{R} \times \pi \vec{i}$ où $\mathbb{R} \in \mathbb{R}$ et $\vec{i}$ est vecteur directeur de l'axe des abscisses.

On obtient ainsi la courbe de f sur $\mathbb{R}$

